TD limites de fonctions - TG

À la main...

28 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 1.$$

a) Conjecturer la limite de f en $+\infty$ à l'aide de la calculatrice.

b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

> 1 Résoudre$(3x^2 - 1 > A, x, A > 0)$
>
> $\rightarrow \left\{ x < -\sqrt{A+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, x > \sqrt{A+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

c) Dans chaque cas, en déduire les valeurs de $x > 0$ pour lesquelles :

- $f(x) > 1\,082$;
- $f(x) > 998\,786$.

34 f est la fonction définie sur $]2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

a) Conjecturer la limite de f en 2 à l'aide de la calculatrice.

b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

> 1 Simplifier$\left(\text{Résoudre}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} > A, x, A > 0\right)\right)$
>
> $\rightarrow \left\{ 2 < x < \frac{2A^2+1}{A^2} \right\}$

c) En déduire les réels $x > 2$ pour lesquels $f(x) > 100\,000$.

31 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction h définie sur $]-\infty ; 0[$ par :

$$h(x) = 3 + \frac{4}{x}.$$

a) Conjecturer la limite de h en $-\infty$ à l'aide de la calculatrice.

b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

> 1 Résoudre$\left(3 + A < 3 + \frac{4}{x} < 3, x, A < 0\right)$
>
> $\rightarrow \left\{ x < \frac{4}{A} \right\}$

c) Interpréter géométriquement cette limite.

35 g est la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2}{3-x}.$$

a) Conjecturer la limite de g en 3 à l'aide de la calculatrice.

b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

> 1 Simplifier$\left(\text{Résoudre}\left(\frac{2}{3-x} < A, x, A < 0\right)\right)$
>
> $\rightarrow \left\{ 3 < x < \frac{3A-2}{A} \right\}$

c) En déduire les réels $x > 3$ pour lesquels :

$$g(x) < -10\,000.$$

Calculs de limites – opérations – FI - signes

Pour les exercices 53 à 56, étudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f définie sur D.

53 $f(x) = -2x^4 + 3x^2 + x \quad D = \mathbb{R}$

54 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - 9x \quad D = \mathbb{R}$

55 $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 9}{x - 3} \quad D =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

56 $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 1} \quad D = \mathbb{R}$

59 f est la fonction définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-3x + 1}{x - 2}.$$

On se propose d'étudier la limite de f en 2.

a) Recopier et compléter :

- $\lim\limits_{x \to 2} (-3x + 1) = \ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = \ldots$

b) Dresser le tableau de signes de $x - 2$.

c) Recopier et compléter :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \ldots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \ldots$

Pour les exercices 60 et 61, étudier la limite en a de la fonction f définie sur D.

60 $f(x) = \frac{2x}{x + 5} \quad D = \mathbb{R} - \{-5\} \quad a = -5$

61 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 2}{1 - x} \quad D = \mathbb{R} - \{1\} \quad a = 1$

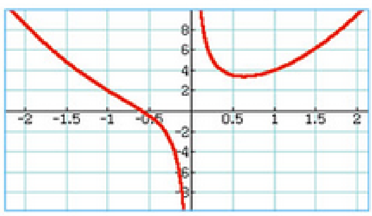
62 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 7}.$$

Démontrer que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

63 f est la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + 1 + \frac{1}{x}$.

Voici la courbe représentative de f obtenue à l'écran d'une calculatrice.



a) Conjecturer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

b) Prouver ces conjectures.

70 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x+1}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$ en utilisant ce schéma de décomposition.

$$\boxed{x \longmapsto \underbrace{2x+1}_{X} \longmapsto e^X}$$

71 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Utiliser un schéma de décomposition pour étudier la limite de h en : • $+\infty$; • $-\infty$; • 0.

Conseil : étudier les limites à droite et à gauche en 0.

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x - 5}{2e^x + 7}$.

a) Étudier la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3 - 5e^{-x}}{2 + 7e^{-x}}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement ces résultats.

69 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$.

a) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à l'aide de la calculatrice.

b) Étudier la limite de f en $-\infty$.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$ après avoir mis e^x en facteur au dénominateur.

d) Interpréter graphiquement ces résultats.

Comparaison

40 h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x > 0$, $1 - \dfrac{1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

Déterminer mentalement la limite de h en $+\infty$.

41 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3\sin(x).$$

a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant x^2 - 3$.

b) En déduire la limite de f :

• en $+\infty$; • en $-\infty$.

45 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 4 + \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

a) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$:

$$4 - \frac{1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant 4 + \frac{1}{x^2}.$$

b) En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$, puis en $-\infty$.

66 Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction définie sur $\mathbb{R}$, en $+\infty$, puis en $-\infty$.

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$

b) $g(x) = x(1 + e^{-x})$

Conseil : utiliser $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

67 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{e^x + 1}.$$

Étudier la limite de h en $+\infty$, puis en $-\infty$.

72 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.

2. a) Vérifier que pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right).$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

73 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x}$$

1. Étudier la limite de g en $-\infty$.

2. a) Recopier et compléter pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = \ldots \frac{e^{2x}}{2x}.$$

b) À l'aide d'un schéma de décomposition, déterminer la limite de g en $+\infty$.

Pour les exercices 74 à 77, étudier la limite de la fonction en $+\infty$.

74 $f(x) = x + 2 - e^x$

75 $g(x) = xe^{-x}$

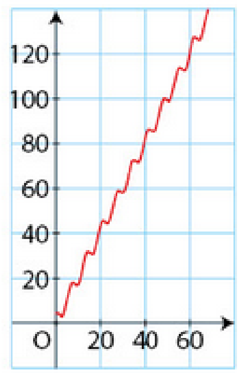
76 $h(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

77 $k(x) = e^{2x} - xe^x$

43 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 3\cos(x).$$

Voici sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



a) Conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Démontrer cette conjecture à l'aide d'un théorème de comparaison.

c) Majorer f pour étudier sa limite en $-\infty$.

44 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$:

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

46 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

a) Montrer que tout réel $x>0$, $x^2 \leqslant x^2+1 \leqslant (x+1)^2$.

b) En déduire un encadrement de la fonction f.

c) Conclure alors sur la limite de la fonction f en $+\infty$.

47 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=2+\frac{\cos^2(x)}{x}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

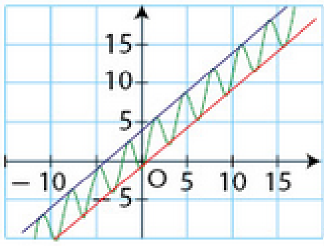
Démontrer que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

87 Voici dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f :

$$x \mapsto x-1+5\sin^2(x)$$

et les droites d'équations

$$y=x-1 \text{ et } y=x+4.$$



Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Applications – limites de fonctions

103 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=e^{-x}\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. a) Utiliser un encadrement de $g(x)$ pour étudier la limite de g en $+\infty$.

b) En déduire une asymptote d à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe une infinité de fois son asymptote d.

2. Numa affirme : « La limite de la fonction g en $-\infty$ est $+\infty$ ».

Expliquer pourquoi Numa se trompe.

104 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x+2e^{-x}+x.$$

a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Démontrer que pour tout réel x,

$$f(x)=e^{-x}(e^{2x}+2+xe^x).$$

c) Déterminer alors la limite de f en $-\infty$.

105 g est la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{(2-x)e^{-x}}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. Étudier la limite de la fonction g :

a) en 2 ; **b)** en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats pour la courbe $\mathscr{C}$.

94 **1.** g est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par :

$$g(x)=\frac{2x-1}{x+3}.$$

a) Déterminer l'ensemble D des nombres réels $x \neq -3$ tels que $g(x) \geqslant 0$.

b) Étudier la limite de la fonction g en $-\infty$, puis en $+\infty$.

c) Étudier les limites de g à droite et à gauche en -3.

2. f est la fonction définie sur D par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}.$$

a) Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

b) Étudier la limite de la fonction f en -3.

95 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) Montrer que pour tout $x>0$,

$$g(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

b) Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

109 f est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)e^x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$, puis en 1.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a) Démontrer que pour tout réel $x>1$:

$$f'(x)=\frac{x}{(1-x)^2e^x}.$$

b) Étudier les variations de f.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Construire la courbe Γ et ses asymptotes.

100 Une usine fabrique des puces destinées aux appareils électroniques.

Le coût total de fabrication, en millier d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(q)=\frac{8}{1+e^{-q}}.$$

1. a) Afficher la courbe représentative de la fonction C à l'écran de la calculatrice.

b) Étudier la limite de la fonction C en $+\infty$.

2. On note $C_M(q)$ le coût moyen de fabrication d'une puce lorsqu'on en fabrique q (avec $q>0$).

a) Exprimer $C_M(q)$ en fonction de q.

b) Afficher la courbe représentative de la fonction C_M à l'écran de la calculatrice.

c) Étudier la limite de la fonction C_M en $+\infty$.

Interpréter le résultat obtenu en termes économiques.

114 Relier limites et courbes

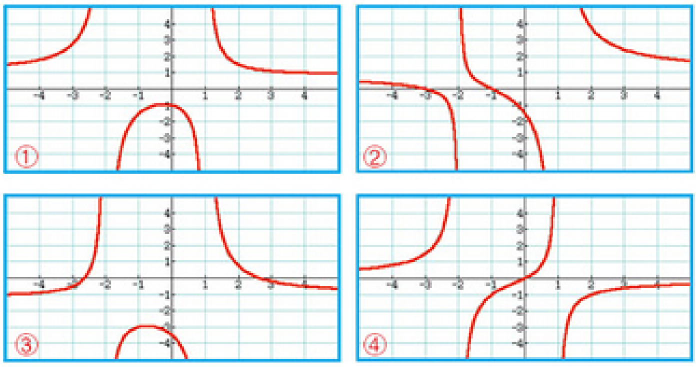
Raisonner **Calculer**

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Associer à chacune des fonctions suivantes définies sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, l'écran sur lequel apparait sa courbe représentative.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-2}$ $\qquad f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x}{x^2+x-2}$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{-x^2+7}{x^2+x-2}$ $\qquad f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x^2+x-2}$



En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite des fonctions suivantes en a :

1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ en $a=0$
2. $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$ en $a=0$
3. $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ en $a=\dfrac{\pi}{2}$
4. $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$ en $a=\dfrac{\pi}{2}$
5. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ en $a=0$
6. $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}$ en $a=0$.

107 Pour tout réel a, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x)=\dfrac{ax+\frac{1}{2}}{e^x}$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

b) Suivant les valeurs du nombre réel a, déterminer la limite de la fonction h_a en $-\infty$.

2. a) Démontrer que pour tout réel x :

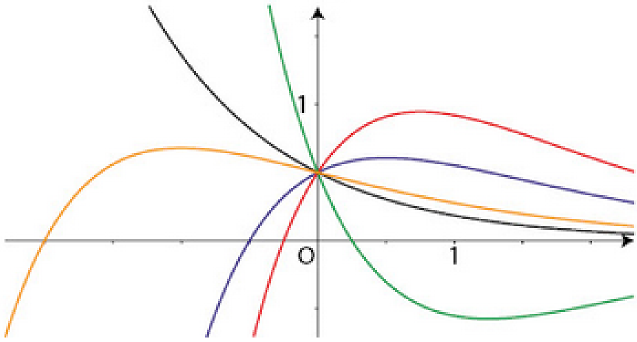
$$h_a'(x)=\frac{-ax+a-\frac{1}{2}}{e^x}.$$

b) Démontrer que pour tout réel $a\neq 0$, la fonction h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on exprimera en fonction de a.

3. Dans un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de la fonction h_a.

Voici les courbes $\mathscr{C}_a$ pour cinq valeurs de a :

$$-2\,;0\,;\frac{1}{4}\,;1\,;2.$$



106 **1.** h est la fonction définie $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{e^{2x}}{x+e^x}.$$

Voici la courbe représentative de la fonction h à l'écran d'une calculatrice.

a) Conjecturer la limite de la fonction h en $+\infty$.

b) Démontrer cette conjecture.

Conseil : mettre e^x en facteur au dénominateur.

2. k est la fonction définie sur $]-\infty\,;-1]$ par :

$$k(x)=\frac{e^{2x}}{x+e^x}.$$

a) Afficher la courbe représentative de k à l'écran de la calculatrice et conjecturer la limite de k en $-\infty$.

b) Prouver cette conjecture.